

REALIMENTAÇÃO DA DERIVADA DOS ESTADOS EM SISTEMAS FUZZY TAKAGI SUGENO

EDVALDO ASSUNÇÃO*, FLÁVIO ANDRADE FARIA*, MARCELO C. M. TEIXEIRA*, RODRIGO CARDIM*

*UNESP - Universidade Estadual Paulista
Departamento de Engenharia Elétrica,
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira,
Avenida Brasil, 56, 15385-000, Ilha Solteira, SP.

Emails: edvaldo@dee.feis.unesp.br, flaviof15@yahoo.com.br, marcelo@dee.feis.unesp.br,
rodrigocardim@terra.com.br

Abstract— In some practical problems, for instance in the control systems for the suppression of vibration in mechanical systems, the state-derivative signals are easier to obtain than the state signals. Sufficient Linear Matrix Inequalities (LMI) conditions for the design of state-derivative feedback for nonlinear systems are proposed. The nonlinear systems are represented by fuzzy models proposed by Takagi and Sugeno. The proposed method provides control over the transient behavior of the closed-loop system. The LMI, when feasible, can be efficiently solved using convex programming techniques. The efficiency of design procedure is illustrated through numeric example.

Keywords— state-derivative feedback, control of non-linear systems, fuzzy control, linear matrix inequalities (LMI), Takagi-Sugeno (T-S) model

Resumo— Em alguns problemas práticos, por exemplo no controle de vibrações de sistemas mecânicos, é mais fácil obter o sinal da derivada dos estados que o sinal dos estados. Usando desigualdades matriciais lineares (LMI) são propostas condições suficientes para o projeto de realimentação da derivada dos estados em sistemas não-lineares. Os sistemas não-lineares são representados por modelos Fuzzy Takagi Sugeno. A metodologia proposta é capaz de atuar no transitório do sistema em malha fechada. LMI quando factíveis são facilmente resolvidas usando técnicas de programação convexa. A eficiência do método proposto é ilustrada através de um exemplo numérico.

Keywords— realimentação da derivada dos estados, controle de sistemas não-lineares, controle fuzzy, desigualdades matriciais lineares (LMI), modelo Takagi-Sugeno (T-S)

1 Introdução

Existem problemas práticos em que a derivada dos estados é mais fácil de se obter do que os sinais dos estados. Como exemplo pode-se citar sistemas nos quais os sensores usados são acelerômetros. A partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, porém é mais complexo obter o deslocamento (Abdelaziz and Valášek, 2004), logo os sinais usados para realimentar esses sistemas são: a aceleração e a velocidade. Essas são as derivadas da velocidade e da posição que podem representar os estados do sistema. Devido ao seu baixo custo os acelerômetros têm sido cada vez mais usados pela indústria. As aplicações mais comuns são em controle de oscilações de sistemas mecânicos (Abdelaziz and Valášek, 2004; Abdelaziz and Valášek, 2005; Kwak et al., 2002a), na indústria automobilística (Reithmeier and Leitmann, 2003), na engenharia aeronáutica (Kwak et al., 2002b) e na engenharia civil (Duan et al., 2005).

Na literatura especializada é possível encontrar vários artigos sobre o uso da realimentação da derivada dos estados (realimentação derivativa) em sistemas lineares (Abdelaziz and Valášek, 2004; Abdelaziz and Valášek, 2005; Kwak et al., 2002a; Teixeira et al., 2006). Porém existem poucos resultados envolvendo sistemas não-lineares.

Devido a sua complexidade sistemas não-lineares são difíceis de ser analisados. Uma maneira de facilitar a análise de estabilidade desses sistemas é representá-los através de modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi and Sugeno, 1985; Sugeno and Kang, 1988). Esse tipo de modelagem consiste em obter uma aproximação do sistema não-linear através de uma combinação fuzzy de sistemas lineares, normalmente invariantes no tempo. Já é conhecido na literatura (Taniguchi et al., 2001) que um sistema

não-linear pode ser exatamente representado por modelos T-S escolhendo-se adequadamente o número de sistemas lineares (modelos locais) e os parâmetros da combinação fuzzy (conhecidos como, funções de pertinência). O estudo de sistemas não-lineares através de sistemas fuzzy é uma área de pesquisa bastante explorada (Teixeira and Žak, 1999; Kim and Lee, 2000; Tanaka et al., 1998). Sendo que os trabalhos mais recentes têm feito esse estudo usando desigualdades matriciais lineares (LMI) (Tanaka et al., 1998; Teixeira et al., 2003; Teixeira et al., 2001). A solução de problemas de otimização, com restrições descritas por LMI e função objetivo linear pode ser obtida empregando-se o método de planos de corte. Para resolver este tipo de problema convexo de programação semi-definida pode-se utilizar, por exemplo, o MATLAB (Gahinet et al., 1995) ou o LMIsol (de Oliveira et al., 1997). Esses algoritmos têm garantia de convergência ao ótimo global em tempo finito. Nesse trabalho são propostas condições suficientes para o projeto de realimentação da derivada dos estados em sistemas T-S usando LMI. A técnica proposta considera restrições de desempenho no projeto do controlador, tais como taxa de decaimento porcentagem de overshoot e tempo de subida. A técnica proposta é avaliada através da solução de um exemplo numérico.

2 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

Considere um sistema não-linear da forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t)) + g(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}\tag{1}$$

sendo $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$, $g(x)$ funções não-lineares, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

O sistema (1) pode ser representado por modelos T-S dados abaixo (Takagi and Sugeno, 1985; Tanaka et al.,

1998).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))(\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)) \quad (2)$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{u}(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t))\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t), \quad (4)$$

sendo $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^r$ denominado de vetor premissa, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ a saída do sistema, as matrizes $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ são os parâmetros dos modelos locais. As variáveis $\alpha_i(\mathbf{z}(t))$ satisfazem a relação:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i(\mathbf{z}(t)) = 1, \quad \mathbf{a} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_r]' \end{array} \right\} \quad (5)$$

NOTA: Apenas por facilidade de notação, durante o texto o termo $\alpha_i(\mathbf{z}(t))$ será representado por α_i .

Supondo que as matrizes \mathbf{A}_i do sistema (2) sejam invertíveis ($\det(\mathbf{A}_i) \neq 0, \forall i$). O objetivo é encontrar uma matriz constante $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que, ao realimentar o sistema (3) com a entrada de controle

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}(t), \quad (6)$$

o sistema em malha fechada, dado por (3) e (6), seja assintoticamente estável e a matriz $(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})$ seja invertível. Daí o sistema em malha fechada pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t) \\ &\Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Na próxima seção são apresentados conceitos de estabilidade necessários para a metodologia proposta.

3 \mathcal{D} -estabilidade

Seja \mathcal{D} uma região do semi-plano esquerdo complexo, uma matriz \mathbf{A} é \mathcal{D} -estável, se todos os autovalores de \mathbf{A} pertencem a \mathcal{D} . Da teoria de controle clássico sabe-se que o transitório de um sistema dinâmico pode ser modificado alocando os seus autovalores em uma região específica do plano complexo. Em (Chilali and Gahinet, 1996) são apresentadas condições necessárias e suficientes para que um sistema de segunda ordem satisfaça índices de desempenho como taxa de decaimento, porcentagem de overshoot e tempo de subida. Os índices foram representados por (γ, r, θ) , a região do plano complexo que satisfaz os índices é dada por:

$$S(\gamma, r, \theta) = \begin{cases} x < -\gamma < 0, & (a) \\ |x + yj| < r, & (b) \\ \tan(\theta)x < -|y|, & (c) \end{cases}$$

a restrição (a) representa um semi-plano à esquerda da reta vertical que passa pelo ponto $(-\gamma, 0)$, com $\gamma > 0$; (b) representa um disco centrado na origem de raio r ; (c) é uma restrição que limita o argumento θ dos elementos do conjunto.

Os autores Chilali and Gahinet (1996) apresentaram um resultado que verifica a \mathcal{D} -estabilidade de uma matriz \mathbf{A} na região $S(\gamma, r, \theta)$. O resultado é citado abaixo:

Lemma 1 Uma matriz \mathbf{A} é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se e somente se, existe uma matriz \mathbf{Q} simétrica verificando o seguinte conjunto de LMIs:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}' + 2\gamma\mathbf{Q} < 0, \quad (I)$$

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{Q} & \mathbf{A}\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}\mathbf{A}' & -r\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0, \quad (II)$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}') & \cos(\theta)(\mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\mathbf{A}') \\ \cos(\theta)(\mathbf{Q}\mathbf{A}' - \mathbf{A}\mathbf{Q}) & \sin(\theta)(\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}') \end{bmatrix} < 0, \quad (III)$$

$$\mathbf{Q} > 0. \quad (IV)$$

Proof: ver em (Chilali and Gahinet, 1996). \square

Para o desenvolvimento da metodologia proposta é necessária a seguinte propriedade de soma de matrizes: para toda matriz \mathbf{M} não simétrica ($\mathbf{M} \neq \mathbf{M}'$) tem-se que,

$$\mathbf{M} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} + \mathbf{M}' < 0. \quad (8)$$

4 Projeto do controlador

Estendendo o resultado do Lema 1, o próximo teorema encontra condições suficientes para que os autovalores do sistema (7) pertençam a região $S(\gamma, r, \theta)$.

Theorem 2 Supondo que as matrizes \mathbf{A}_i de (2) são invertíveis ($\det(\mathbf{A}_i) \neq 0, \forall i$), então o sistema (7) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável se existe uma matriz simétrica \mathbf{Q} e uma matriz \mathbf{Y} tais que (V), (VI), (VII) e (VIII) são factíveis. Então uma solução para o problema é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}. \quad (9)$$

Proof: Suponha que existem \mathbf{Q} e \mathbf{Y} satisfazendo (V), (VI), (VII) e (VIII), a seguinte substituição de variáveis é usada durante a demonstração

$$\mathbf{A}_N = (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{a}). \quad (10)$$

A demonstração do teorema é realizada em três partes, uma para cada LMI.

Parte 1 - usando a propriedade dos menores principais em (V) e (3) obtém-se

$$\mathbf{A}_i\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_i' + \mathbf{B}_j\mathbf{Y}\mathbf{A}_i' + \mathbf{A}_i\mathbf{Y}'\mathbf{B}_j' < 0. \quad (11)$$

De (5) segue que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, logo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i' \\ &+ \sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i' + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{B}_j' = \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K}\mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a})\mathbf{Q}\mathbf{K}'\mathbf{B}(\mathbf{a})' < 0,$$

daí, substitua \mathbf{Y} pela expressão $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$ e obtenha

$$\mathbf{A}(\mathbf{a})(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}[\mathbf{A}(\mathbf{a})(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})]' < 0, \quad (12)$$

agora usando a propriedade (8) em (12) conclui-se que $\mathbf{A}(\mathbf{a})(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})\mathbf{Q} < 0 \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a})\mathbf{K})$ é invertível.

Agora aplique o complemento de Schur (Boyd et al., 1994) na LMI (V) e obtenha

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_i\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_i' + \mathbf{B}_j\mathbf{Y}\mathbf{A}_i' + \mathbf{A}_i\mathbf{Y}'\mathbf{B}_j' \\ &+ (\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j\mathbf{Y})[2\gamma\mathbf{Q}^{-1}](\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j\mathbf{Y})' < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j & \mathbf{Q} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \\ \mathbf{Q} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j & -\frac{\mathbf{Q}}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{V})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} ((\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}) \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i (\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y})') & -\mathbf{A}_i \mathbf{Q} \mathbf{A}'_k \\ -\mathbf{A}_i \mathbf{Q} \mathbf{A}'_k & \frac{r}{2} ((\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}) \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i (\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y})') \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{VI})$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) & \cos(\theta) [\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j - (\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i)] \\ \cos(\theta) [\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i - (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j)] & \sin(\theta) (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{VII})$$

$$\mathbf{Q} > 0, \quad (\text{VIII})$$

sendo $i, j, k = 1, \dots, r$.

Repetindo as mesmas operaões anteriores obtém-se

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}'_i \\ & + \sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}'_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{B}'_j \\ & + \left(\mathbf{Q} + \sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \right) [2\gamma \mathbf{Q}^{-1}] \left(\mathbf{Q} + \sum_{i=1}^r \alpha_j \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \right)' = \\ & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Y}' \mathbf{B}(\mathbf{a})' \\ & + (\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y}) [2\gamma \mathbf{Q}^{-1}] (\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y})' = \\ & \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K} \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} \mathbf{K}' \mathbf{B}(\mathbf{a})' \\ & + (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) [2\gamma \mathbf{Q}] (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})' < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Então multiplique (13) à esquerda por $(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})^{-1}$ e à direita por $[(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})']^{-1}$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' [(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})^{-1}]' + (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} + 2\gamma \mathbf{Q} < 0, \quad (14)$$

e substitua (10) em (14), para obter

$$\mathbf{A}_N \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_N' + 2\gamma \mathbf{Q} < 0.$$

Portanto, quando a LMI (V) é factível, o sistema (7) satisfaz (I).

Parte 2 - Usando (5) em (VI) chega-se em (15), daí segue de (3) que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{r}{2} ((\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y}) \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) (\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y})') & \dots \\ & -\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' & \dots \\ \dots & & \\ \dots & -\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' & \\ \dots & \frac{r}{2} ((\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y}) \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) (\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y})') & \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \frac{r}{2} ((\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})') & \dots \\ & -\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' & \dots \\ \dots & & \\ \dots & -\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' & \\ \dots & \frac{r}{2} ((\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})') & \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Novamente usando a propriedade dos menores principais e (8) em (16) chega-se em

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' + \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})' < 0 \\ & \Rightarrow (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})' < 0, \end{aligned}$$

logo a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{a})'$ é invertível, daí multiplicando (16) à esquerda por $\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{a})^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(\mathbf{a})^{-1} \end{bmatrix}$ e à direita por

$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}(\mathbf{a})')^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{A}(\mathbf{a})')^{-1} \end{bmatrix}$ e substituindo (10), obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{r}{2} (\mathbf{A}(\mathbf{a})^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})' (\mathbf{A}(\mathbf{a})')^{-1}) & \dots \\ & -\mathbf{Q} & \dots \\ \dots & & \\ \dots & -\mathbf{Q} & \\ \dots & \frac{r}{2} (\mathbf{A}(\mathbf{a})^{-1} (\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y}) + (\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{Y})' (\mathbf{A}(\mathbf{a})')^{-1}) & \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \frac{r}{2} (\mathbf{A}_N^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} (\mathbf{A}_N')^{-1}) & -\mathbf{Q} \\ -\mathbf{Q} & \frac{r}{2} (\mathbf{A}_N^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{Q} (\mathbf{A}_N')^{-1}) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Da Álgebra sabe-se que se λ_i é autovalor de \mathbf{A}_N , então $\frac{1}{\lambda_i}$ é autovalor de \mathbf{A}_N^{-1} , sendo $\lambda_i = x + yj$ não nulo. Usando essa propriedade e a relação de equivalência $(\mathbf{Q}, \mathbf{A} \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \mathbf{A}') \sim (1, \lambda_i, \lambda_i)$ (Chilali and Gahinet, 1996) em (17) conclui-se que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \right) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) & -1 \\ -1 & \frac{r}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right) \end{bmatrix} < 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\left(\frac{rx}{x^2 + y^2} \right) & 1 \\ 1 & -\left(\frac{rx}{x^2 + y^2} \right) \end{bmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Observe que a matriz (18) é real. Estudando a positividade da matriz através dos menores principais tem-se

- 1) $\frac{-rx}{x^2 + y^2} > 0 \Leftrightarrow -rx > 0 \Leftrightarrow x < 0.$
e
- 2) $\frac{r^2 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow r^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2.$

Analisando o item 2 pode-se concluir que

2.a) Se $r \geq |x|$,

$$\begin{aligned} & r^2 r^2 \geq r^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2 \\ & \Leftrightarrow r^2 r^2 > (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (r^2)^2 > (x^2 + y^2)^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 + y^2 < r^2. \end{aligned}$$

2.b) Se $r < |x|$,

$$\begin{aligned} & x^2 x^2 > r^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 x^2 > (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow (x^2)^2 > (x^2 + y^2)^2 \\ & \Leftrightarrow x^2 > x^2 + y^2. \quad (\text{Absurdo!}) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{r}{2} \left[\left(\mathbf{Q} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \right) \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}'_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \left(\mathbf{Q} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \right)' \right] & \dots \\ & - \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k \mathbf{A}'_k \right) & \dots \\ \dots & - \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \right) \mathbf{Q} \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k \mathbf{A}'_k \right) & \\ \dots & \frac{r}{2} \left[\left(\mathbf{Q} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \right) \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}'_i + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{A}_i \left(\mathbf{Q} + \sum_{i=1}^r \alpha_i \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \right)' \right] & \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

Logo pelos itens (2a) e (2b) a expressão (17) é factível se e somente se,

$$x^2 + y^2 < r^2. \quad (19)$$

A expressão (17) é equivalente a LMI (VI). Portanto quando a LMI (VI) é factível o sistema (7) satisfaz a desigualdade (II).

Parte 3 - Para a demonstração da LMI (VII) usa-se as propriedades do produto de Kronecker (Chilali and Gahinet, 1996). Suponha que (VII) é factível, daí segue que

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) & \dots \\ \cos(\theta)[\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i - (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j)] & \dots \\ \dots & \cos(\theta)[\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j - (\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i)] \\ \dots & \sin(\theta)(\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) & \cos(\theta)(\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) \\ -\cos(\theta)(\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) & \sin(\theta)(\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta)(\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i) & -\cos(\theta)(\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i) \\ \cos(\theta)(\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i) & \sin(\theta)(\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i) \end{bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) \right\} +$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i) \right\} =$$

$$\mathbf{W} \otimes (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{A}_i \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j) + \mathbf{W}' \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_j \mathbf{Y} \mathbf{A}'_i) =$$

$$\mathbf{W} \otimes [\mathbf{A}_i (\mathbf{Q} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_j)] + \mathbf{W}' \otimes [(\mathbf{Q} + \mathbf{B}_j \mathbf{Y}) \mathbf{A}'_i] < 0,$$

sendo $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$.

Usando (5), (3) e substituindo $\mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{Q}$, chega-se em

$$\mathbf{W} \otimes [\mathbf{A}(\mathbf{a})(\mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{K}' \mathbf{B}(\mathbf{a})')] + \mathbf{W}' \otimes [(\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K} \mathbf{Q}) \mathbf{A}(\mathbf{a})'] =$$

$$\mathbf{W} \otimes [\mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})'] + \mathbf{W}' \otimes [(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K}) \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{a})'] < 0,$$

multiplicando à esquerda por $(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})^{-1})$, à direita por $(\mathbf{I} \otimes [(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})']^{-1})$ e substituindo (10) tem-se que

$$\mathbf{W} \otimes (\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q} + \mathbf{W}' \otimes [(\mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{a}) \mathbf{K})^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{a}) \mathbf{Q}]' =$$

$$\mathbf{W} \otimes (\mathbf{A}_N \mathbf{Q}) + \mathbf{W}' \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{A}_N') =$$

$$(\mathbf{W} \otimes \mathbf{A}_N \mathbf{Q}) + (\mathbf{W}' \otimes \mathbf{A}_N \mathbf{Q})' < 0. \quad (20)$$

Das propriedades do produto de Kronecker pode-se concluir que a expressão (20) é equivalente a LMI (III) em \mathbf{A}_N , logo quando a LMI (VII) é factível o sistema (7) satisfaz a LMI (III).

Portanto quando as LMI (V), (VI), (VII) e (VIII) são factíveis, o sistema (7) satisfaz as LMI (I), (II), (III) e (IV).

Então pelo Lema 1 o sistema (7) é $S(\gamma, r, \theta)$ -estável e uma das soluções para o controlador \mathbf{K} é dado por (9), sendo \mathbf{Q} e \mathbf{Y} soluções das LMI (V), (VI), (VII) e (VIII). \square

5 Exemplo

O exemplo é resolvido através de simulação em micro-computadores. Para a simulação foi usado o pacote "LMI control toolbox" presente no software MATLAB (Gahinet et al., 1995). São exibidas as soluções obtidas com o Teorema 2 e a resposta dinâmica do sistema para uma determinada condição inicial.

5.1 Sistema de suspensão ativa

Considere o sistema de suspensão ativa dado em (Reithmeier and Leitmann, 2003). Modificando as entradas de controle e considerando as molas do sistema não-lineares, pode-se obter um sistema mais geral (Figura 1).

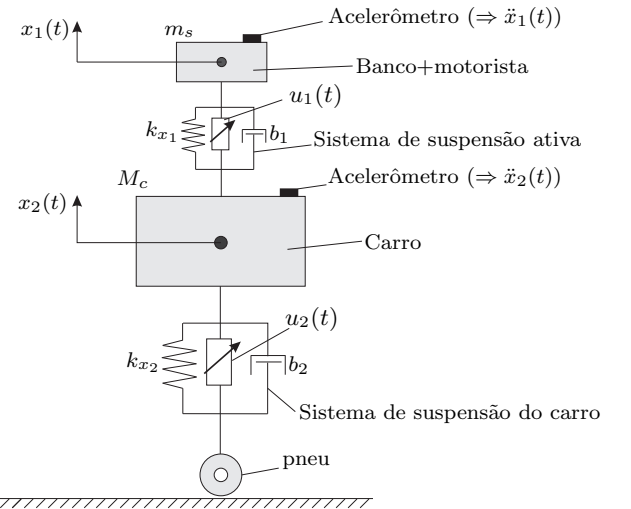


Figura 1: Sistema de suspensão ativa de um carro.

O modelo consiste em um carro de massa M_c , um banco e uma pessoa, cuja massa conjunta é m_s . Vibrações causadas por irregularidades na pista podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão (mola k_{x_2} e amortecedor b_2). Mesmo assim o motorista ainda pode sentir um pouco de vibrações. Uma maneira de melhorar o conforto do motorista é instalar um sistema de suspensão ativa no seu banco (composto por uma mola k_{x_1} e um amortecedor b_1) e diminuir as vibrações entre o motorista (m_s) e o carro (M_c), modificando as entradas de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Como em (Reithmeier and Leitmann, 2003), estão disponíveis para realimentação somente os sinais de acelera-

$$f(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1[1+a^2(x_2(t)-x_1(t))^2]x_1(t)}{m_s} & \frac{k_1[1+a^2(x_2(t)-x_1(t))^2]x_2(t)}{m_s} & -\frac{b_1\dot{x}_1(t)}{m_s} & \frac{b_1\dot{x}_2(t)}{m_s} \\ \frac{k_1[1+a^2(x_2(t)-x_1(t))^2]x_1(t)}{M_c} & \frac{-k_1[1+a^2(x_2(t)-x_1(t))^2]-k_2[1+a^2x_2(t)^2]x_2(t)}{M_c} & \frac{b_1\dot{x}_1(t)}{M_c} & \frac{(-b_1-b_2)\dot{x}_2(t)}{M_c} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$g(x(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_s} & 0 \\ -\frac{1}{M_c} & \frac{1}{M_c} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ção $\ddot{x}_1(t)$ e $\ddot{x}_2(t)$ (que são obtidos pelos acelerômetros). Os valores $\dot{x}_1(t)$ e $\dot{x}_2(t)$ são obtidos pela integração dos respectivos sinais de aceleração.

O sistema dinâmico pode ser descrito pelas equações (21): O vetor de estados é definido por $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]'$.

Os sinais medidos são as acelerações e velocidades (derivada dos estados), assim pode-se usar a metodologia proposta para resolver o problema. Considere $M_c = 1500\text{kg}$ (massa do carro), 90kg (massa do banco (20kg) + peso do motorista 70kg), $b_1 = 4 \times 10^3\text{Ns/m}$ e $b_2 = 5 \times 10^2\text{Ns/m}$ (coeficientes de amortecimento). Os coeficientes de elasticidade das molas são não-lineares: $k_{x_1} = k_1x_1(t)(1+a^2x_1(t)^2)$ e $k_{x_2} = k_2x_2(t)(1+a^2x_2(t)^2)$, sendo $k_1 = 4 \times 10^4\text{N/m}$, $k_2 = 5 \times 10^3\text{N/m}$ e $a = 1$. Usando o método proposto em (Teixeira and Žak, 1999) para obter os modelos locais, obtém-se as seguintes matrizes:

Em torno do ponto de operação: $x_{po_1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -444.44 & 444.44 & -44.444 & 44.444 \\ 26.667 & -30 & 2.6667 & -3 \end{bmatrix}.$$

Em torno do ponto de operação: $x_{po_2} = [0.2 \ 0 \ 0 \ 0]'$,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -462.22 & 497.78 & -44.444 & 44.444 \\ 27.733 & -33.2 & 2.6667 & -3 \end{bmatrix}.$$

Em torno do ponto de operação: $x_{po_3} = [0 \ 0.08 \ 0 \ 0]'$,

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -452.98 & 447.29 & -44.444 & 44.444 \\ 27.179 & -30.192 & 2.6667 & -3 \end{bmatrix}.$$

Em torno do ponto de operação: $x_{po_4} = [0.2 \ 0.08 \ 0 \ 0]'$,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -457.02 & 466.29 & -44.444 & 44.444 \\ 27.436 & -31.369 & 2.6667 & -3 \end{bmatrix}.$$

Especificando os seguintes valores $\gamma = 2$, $r = 30$, $\theta = 60^\circ$ e usando o MATLAB para resolver as LMI (V), (VI), (VII) e (VIII) do Teorema 2 obtém-se as seguintes soluções:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.04569 & 0.013371 & -0.37612 & -0.049048 \\ 0.013371 & 0.019243 & -0.11489 & -0.17998 \\ -0.37612 & -0.11489 & 4.1227 & 1.4765 \\ -0.049048 & -0.17998 & 1.4765 & 2.8627 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 33.475 & 9.5521 & -370.16 & -129.5 \\ 116.43 & 285.07 & -2570.1 & -4369.5 \end{bmatrix}.$$

Usando a equação (9), chega-se no seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} 4452.4 & -4642.3 & 343.98 & -438.23 \\ 1239.2 & -208.9 & 33.817 & -1535.7 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Os autovalores de todas as combinações obtidas com os modelos locais ($A_i = A_1, A_2, A_3, A_4$ e $g(x(t))$) do sistema (21) são exibidos na Tabela 1.

Tabela 1: Autovalores dos modelos locais controlados.

A1 - $g(x(t))$		
Autovalores	Módulo	Argumento
-14.808	14.808	180
-4.7067	4.7067	180
-7.0024	7.0024	180
-10.574	10.574	180
A2 - $g(x(t))$		
Autovalores	Módulo	Argumento
-3.7862	3.7862	180
-11.443 + 2.2607j	11.664	168.82
-11.443 - 2.2607j	11.664	-168.82
-10.42	10.42	180
A3 - $g(x(t))$		
Autovalores	Módulo	Argumento
-15.015	15.015	180
-5.0815	5.0815	180
-6.8159	6.8159	180
-10.179	10.179	180
A4 - $g(x(t))$		
Autovalores	Módulo	Argumento
-4.4234	4.4234	180
-13.964	13.964	180
-8.6933	8.6933	180
-10.01	10.01	180

Conforme estabelecido, a parte real dos autovalores é menor que $\gamma = 2$, todos os autovalores têm módulo menor que $r = 30$ e observe que se $\theta = 60^\circ$, então o argumento dos autovalores tem que pertencer ao intervalo $(120^\circ - 240^\circ)$. Daí pela Tabela 1 verifica-se que os autovalores dos modelos locais pertencem a região $S(2, 30, 60^\circ)$. Para a condição inicial $x(0) = [0.2 \ 0.08 \ 0 \ 0]'$, a resposta dinâmica do sistema não-linear (21) controlado é exibida na Figura 2. Note que pode-se modificar o amortecimento de oscilações do sistema controlado, alterando os parâmetros (γ, r, θ) . A técnica para obtenção de modelos locais presente em (Teixeira and Žak, 1999) obtém uma representação aproximada do sistema não-linear em torno do ponto de operação adotado. Com isso pode-se melhorar os resultados obtidos pelo Teorema 2 apenas modificando ou aumentando o número de pontos de operação.

6 Conclusões

Neste artigo foi proposta uma nova metodologia para alocar pólos de sistemas não-lineares usando realimentação

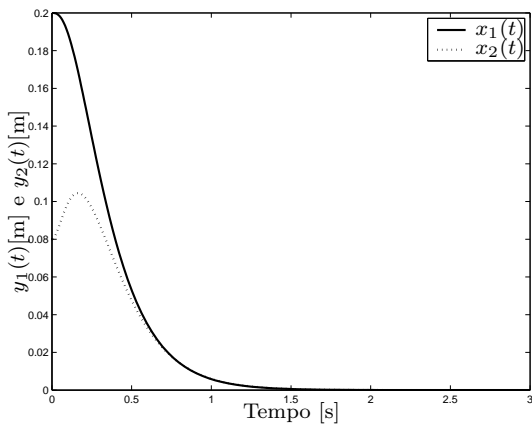


Figura 2: Simulação do sistema controlado.

da derivada dos estados, o resultado é eficaz em sistemas que usam acelerômetros como sensores. Os sistemas não-lineares foram modelados através do modelo Fuzzy Takagi-Sugeno. A metodologia proposta é muito conservativa, pois usa um controlador \mathbf{K} fixo para resolver o problema, porém ao contrário do projeto de reguladores fuzzy (Tanaka et al., 1998), a metodologia dispensa o uso de funções de pertinência para obtenção do controlador, facilitando a implementação em sistemas mecânicos. O uso de LMI para resolver o problema de \mathcal{D} -estabilidade, permite que a técnica proposta seja facilmente resolvida em microcomputadores. Para definir uma nova região para os pólos do sistema em malha fechada basta alterar os parâmetros (γ, r, θ) .

Referências

- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2004). Pole placement for siso linear systems by state-derivative feedback, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* **151**(4): 377–385.
- Abdelaziz, T. H. S. and Valášek, M. (2005). Direct Algorithm for Pole Placement by State-Derivative Feedback for Multi-Input Linear Systems - Nonsingular Case, *Kybernetika* **41**(5): 637–660.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An lmi approach, *IEE Trans. Autom. Control* **41**(3): 358–367.
- de Oliveira, M. C., Farias, D. P. and Geromel, J. C. (1997). *LMISol, User's guide*, UNICAMP, Campinas-SP, Brasil.
- Duan, Y. F., Ni, Y. Q. and Ko, J. M. (2005). State-Derivative feedback Control of Cable Vibration Using Semiactive Magnetorheological Dampers, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* **20**(6): 431–449.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI control toolbox - For use with Matlab*, The Math Works Inc.
- Kim, E. and Lee, H. (2000). New Approaches to Relaxed Quadratic Stability Condition of Fuzzy Control Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**(5): 523–534.
- Kwak, S. K., Washington, G. and Yedavalli, R. K. (2002a). Acceleration-Based Vibration Control of Distributed Parameter Systems Using the “Reciprocal State-Space Framework”, *Journal of Sound and Vibration* **251**(3): 543–557.
- Kwak, S. K., Washington, G. and Yedavalli, R. K. (2002b). Acceleration Feedback-Based Active and Passive Vibration Control of Landing Gear Components, *Journal of Aerospace Engineering* **15**(1): 1–9.
- Reithmeier, E. and Leitmann, G. (2003). Robust Vibration Control of Dynamical Systems Based on the Derivative of the State, *Archive of Applied Mechanics* **72**(11–12): 856–864.
- Sugeno, M. and Kang, G. T. (1988). Structure Identification of Fuzzy Model, *Fuzzy Sets and Systems* **28**: 15–33.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **6**(2): 250–265.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohatake, H. and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–537.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Avellar, R. G. (2003). On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(5): 613–623.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Cardim, R. and Covacic, M. R. (2006). Realimentação da Derivada de Estados a Partir do Projeto com Realimentação de Estados, *Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática (CBA)*, Vol. 1, XVI Congresso Brasileiro de Automática, Salvador, BA, Brasil, pp. 726–731.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Pietrobon, H. C. (2001). On Relaxed LMI-Based Design Fuzzy, *Proceedings of the 16th European Control Conference*, Porto, Portugal, pp. 120–125.
- Teixeira, M. C. M. and Žak, S. H. (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.